

## 5

## Funciones. Límites y continuidad

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

**A.** Utilizar funciones, dadas por su expresión algebraica, para expresar y analizar la dependencia de una magnitud respecto de otra.

**B.** Operar con funciones dadas por sus expresiones algebraicas.

**C.** Calcular, por medios algebraicos, límites de funciones.

**D.** Resolver indeterminaciones del tipo  
 $\frac{k}{0}; \frac{0}{0}; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot (\pm\infty)$ .

**E.** Estudiar la continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

**F.** Determinar los puntos de discontinuidad de una función, así como el tipo de discontinuidad.

**G.** Estudiar la continuidad de una función obtenida a través de operaciones algebraicas entre funciones elementales o por composición de las mismas.

**H.** Utilizar el teorema de Bolzano para acotar y aproximar las soluciones de una ecuación.

**I.** Aplicar los límites y el estudio de la continuidad de una función en la resolución de problemas propios de las ciencias sociales.

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Un comercio vende discos según la siguiente tarifa: si el cliente compra hasta 10 unidades, el precio es de 6 € por unidad, pero si compra más de 10 discos, el precio de cada uno es de  $5 + \frac{10}{x}$  €, siendo  $x$  los discos comprados.
- a) Escribe la función que determina el precio por unidad dependiendo de los discos que se compren.
- b) ¿Se produce alguna discontinuidad en el precio de venta de los discos?

2. Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ , realiza las operaciones indicadas y determina el dominio de las funciones que hayas obtenido.
- a)  $f + g$     b)  $f - g$     c)  $fg$     d)  $\frac{f}{g}$     e)  $g \circ f$     f)  $f \circ g$
3. Si  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , con  $x \neq -1$ , y  $g(x) = (f \circ f)(x)$ , halla  $g(x)$  y  $(g \circ g)(2)$ .

4. Calcula los siguientes límites.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

5. Estudia la continuidad de la función  $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ .

6. Calcula el valor de  $a$  para el cual la función  $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = 1$ .

7. Si  $g(x)$  es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función  $f(x) = \frac{g(x)}{x^3 - x}$ ?

8. Demuestra que la ecuación  $x^5 + 4x^2 + x - 3 = 0$  tiene alguna solución real y da una aproximación correcta hasta las décimas.

9. Por cada unidad de un producto que vende un comerciante cobra 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad, y por cada  $x$  unidades cobra la siguiente cantidad:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

- a) Halla  $a$  para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
- b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran muchísimas unidades?

# 6 Derivadas

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

**A.** Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.

**B.** Calcular la derivada de una función en un punto aplicando la definición.

**C.** Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.

**D.** Calcular la función derivada de funciones elementales.

**E.** Calcular la función derivada de funciones obtenidas mediante operaciones algebraicas con funciones elementales.

**F.** Calcular la función derivada de una función obtenida mediante la composición de dos o más funciones elementales.

**G.** Aplicar las derivadas en la resolución de problemas propios de las ciencias sociales.

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

**1.** Calcular la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

a)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  en  $[2, 5]$

b)  $f(x) = 2x$  en  $[1, 4]$

c)  $f(x) = 2x^2 - 1$  en  $[x, x+h]$

**2.** Dada la función  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ , calcula, aplicando la definición,  $f'(0)$  y  $f'(3)$ .

**3.** Halla las rectas tangentes a la curva  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$  que sean paralelas a la recta  $9x - y = -4$ .

**4.** Calcular la función derivada de  $f(x) = x^2 - 7x$  aplicando la definición.

**5.** Calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - \ln x$     c)  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$     e)  $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$

b)  $f(x) = (x^2 + x) \cos x$     d)  $f(x) = x^3 \cdot 3^x$     f)  $f(x) = \frac{(x^2 + 1) \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$

**6.** Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 2}{x^4} \right)^3$     b)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x - 3}{1 - x}}$     c)  $f(x) = \operatorname{sen}^3(5x^2 - 2x)$

**7.** El número de bacterias de un cultivo, en función del tiempo, viene dado por la expresión  $f(t) = t^2 + 380t + 500$ , en donde  $t$  viene expresado en minutos. Calcula:

a) La tasa de variación media, o velocidad media de crecimiento en el período  $[3, 5]$ .

b) La tasa de variación instantánea o velocidad instantánea de crecimiento en el instante  $t = 10$ .

c) La función que nos da la velocidad de crecimiento de dicho cultivo en función del tiempo.

**8.** Una empresa ha comprobado que la demanda de artículos de un producto, en función del precio, viene dada por la función  $d(x) = 700 - 3x^2$ , donde  $x$  es la variable precio. Calcula:

a) La variación de la demanda si el precio pasa de 5 a 10 €/u.

b) La tasa de variación media en los intervalos  $[5, 10]$  y  $[5, 6]$ .

c) La tasa de variación instantánea cuando el precio es de 5 euros.

**9.** A partir del año 2000, la tasa de inflación, en tanto por ciento, de un determinado país varió según la función  $f(x) = 10 \log \sqrt{x} + 5$ , donde  $x$  representa el número de años transcurridos desde el año 2000.

a) ¿Cuál fue la tasa de inflación en el año 2005?

b) ¿Cuál fue la tasa de variación media de la inflación en el período 2000-2005?

c) Calcula el momento en que la velocidad de crecimiento de la tasa de inflación fue del 0,25 anual.

## 7

## Aplicaciones de las derivadas

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Calcular las derivadas sucesivas de funciones elementales.

B. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable.

C. Determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de una función derivable.

D. Calcular los máximos y mínimos relativos de una función derivable.

E. Calcular los puntos de inflexión de una función derivable.

F. Resolver problemas de optimización en distintos contextos.

G. Determinar el número de raíces reales de una función polinómica cuya función derivada es fácilmente factorizable.

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Calcular las tres primeras derivadas de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \sin x$

b)  $g(x) = \ln x$

c)  $h(x) = x^n$

2. En cada caso, calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos de las funciones indicadas.

a)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

b)  $g(x) = e^x(x^2 - 15)$

3. En cada caso, calcular los intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión de las funciones indicadas.

a)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5$

b)  $g(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$

4. Determina los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga un punto de inflexión en  $P(-2, 6)$  con tangente en él paralela a la recta  $8x + y + 10 = 0$ , y además tome el valor  $-2$  para  $x = 0$ .

5. La cantidad de agua recogida en 1995, en millones de litros, en cierto pantano viene dada, en función del tiempo medido en meses, a través de la expresión  $f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1}$  con  $0 \leq t \leq 12$ .

a) ¿En qué período de tiempo aumentó la cantidad de agua recogida?

b) ¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua? ¿Cuál fue esa cantidad?

6. La función de costes por unidad de tiempo asociada a los inventarios en unos almacenes viene dada por la función  $c(x) = \frac{10x^2 - 20x + 250}{x^2}$ , donde  $x$  indica el tamaño de los pedidos para renovar existencias, y  $c(x)$  se mide en miles de euros por año. Calcular el tamaño de pedidos que hace que  $c(x)$  alcance su valor mínimo, así como dicho valor.

7. Si el precio del marco de una ventana es de 1,20 € por cada metro de altura y 1,92 € por metro de ancho, calcular las dimensiones que debe tener un ventanal de 1 m<sup>2</sup> de área para que el coste del marco sea mínimo.

8. Demuestra que  $x = 0$  es la única raíz real del polinomio

$$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$$

# 8 Representación de funciones

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

**A.** Calcular la tendencia de una función en el infinito y en las proximidades de puntos aislados en los que no está definida.

**B.** Calcular las asíntotas de una función.

**C.** Calcular los puntos de corte con los ejes de una función y el dominio de una función dada por su expresión algebraica, su gráfica o mediante un enunciado.

**D.** Estudiar la simetría, la periodicidad y el signo de una función.

**E.** Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, tras hacer un estudio completo de sus características.

**F.** Resolver ejercicios propios de las ciencias sociales que conlleven el estudio, la representación gráfica o el análisis de la gráfica asociada a la evolución de cierto fenómeno económico o social.

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Dada la función  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$ , calcula su dominio y su tendencia en las proximidades de los puntos en los que no está definida.

2. Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$ ,

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \frac{1}{2x^2-5x+2}$       b)  $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

4. Estudia el signo de  $f(x) = \frac{x^3-27}{x+5}$ .

5. Estudia si las siguientes funciones son pares, impares o no son simétricas.

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$       b)  $g(x) = e^x(x^2-6)$

6. Dada la función  $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-4}$ ,

- Estudia su monotonía y los máximos y mínimos relativos.
- Determina las asíntotas.
- Determina la curvatura y los puntos de inflexión.
- Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de la función y de las funciones  $f(x)+3$ ,  $|f(x)|$  y  $f(x+3)$ .

7. Los resultados financieros de una empresa, en miles de euros y en relación con el número  $x$  de años que lleva funcionando, vienen dados por la expresión

$$f(x) = 30 - \frac{60}{x}$$

- ¿Qué resultados obtuvo durante el primer año de su actividad?
  - ¿En qué momento comenzó a producir beneficios?
  - ¿Hay algún momento en que alcance beneficios máximos?
  - ¿Consideras rentable la empresa? ¿Por qué?
8. Los ingresos y los gastos de una empresa que se constituyó en 2000, en función del tiempo medido en años, vienen dados por las siguientes funciones:
- $$I(x) = x^3 + x^2 \qquad G(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 8$$
- Teniendo en cuenta que la empresa cierra después de dos años seguidos con pérdidas:
- Escribe la función beneficio y calcula en qué año la empresa no tuvo beneficios.
  - Determina el período en el que permaneció abierta.
  - Haz una gráfica conjunta en la que se representen las funciones ingresos, gastos y beneficios.